No d'enregistrement
au C.N.R.S.

ARTICLE PRINCIPAL

Recouvrant en partie

LA THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES PHYSIQUE

Présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Mr. BAIXERAS Joseph

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

1967

Sujet de la Thèse:
soutenue le

devant la commission d'Examen

MM. OLIVER ..... Président
De GENNES ..... Examinateurs
FOURNET .....

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

J. Phys. Chem. Solids Pergamon Press 1967. Vol. 28, pp. 1541–1547. Printed in Great Britain.

PERTES PAR DEPLACEMENT DE VORTEX DANS UN SUPRACONDUCTEUR DE TYPE II NON IDEAL

J. BAIXERAS* et G. FOURNET

L.C.I.E. et Faculté des Sciences de Paris, Fontenay-aux-Roses, France

(*Reçu le* 24 *janvier* 1967)

Résumé—Plusieurs auteurs ont suggéré que les pertes dans les supraconducteurs de deuxième espèce, à l'état mixte, parcourus par un courant, étaient dues au déplacement des vortex. Nous proposons une approche statistique permettant de traiter ce déplacement dans un matériau non idéal, c'est-à-dire contenant des défauts de toutes sortes : défaut de structure, inclusion d'impuretés, précipitation de phase. Grâce à cette analyse nous pouvons déterminer la fonction de répartition des forces d'ancrage dans l'échantillon considéré. Une comparaison est ensuite faite entre un modèle issu de cette théorie et l'expérience. Le bon accord obtenu semble confirmer la validité de notre analyse.

Abstract—Several authors have suggested that losses in type II superconductors in the mixed state carrying an electric current were related to moving vortices. We propose a statistical treatment taking into account this motion in a non ideal substance, i.e. containing every kind of defects: structural defects, impurities, phase precipitation. Thanks to this analysis, we can determine the distribution function of pinning forces in the sample. Comparison between the model corresponding to this theory and the experimental data is carried out. The good agreement we obtain seems to confirm the validity of our analysis.

1. INTRODUCTION

Il est maintenant admis que, sous l'action d'un courant, les vortex caractérisant l'état mixte d'un supraconducteur[1] ont tendance à se déplacer. Ce déplacement, auquel on peut associer une viscosité,[2] provoque une certaine dissipation de puissance. En particulier si on fait passer un courant I dans un échantillon soumis à un champ magnétique que l'on fait croître d'une valeur nulle jusqu'à la valeur H_{c2}, la tension longitudinale, qui est d'abord nulle, apparaît pour une certaine valeur de H et ensuite croît jusqu'à atteindre, au champ H_{c2}, celle que l'on observerait pour le matériau à l'état normal. C'est ce phénomène que nous dénommons "transition résistive". En effet à la tension observée on peut faire correspondre une certaine résistance dynamique R_f qui varie de zéro jusqu'à une valeur de l'ordre de R_n, résistance à l'état normal pour la température à laquelle l'expérience a été effectuée.

Jusqu'à présent la conception la plus répandue[3] du processus physique est la suivante : pour un champ magnétique donné, il existe un courant critique qui correspond aux forces d'ancrage existant dans le matériau et au-delà de ce courant les vortex se déplacent d'un mouvement d'ensemble, de sorte que la tension observée est une fonction linéaire du courant de conduction ; la pente de la droite ainsi obtenue répond à la loi empirique:[3]

$$\frac{R_f}{R_n} = \frac{H}{H_{c2}};$$

R_f et R_n ont la signification définie ci-dessus et H est le champ magnétique pour lequel la courbe a été obtenue.

2. DYNAMIQUE DES VORTEX

En fait si un certain nombre de matériaux suivent assez bien cette loi, nous en avons rencontré d'autres[4] qui ne s'y conforment pas, ce qui nous a amenés à envisager une situation plus complexe lors du déplacement des vortex.

* Ce travail fait partie de la Thèse de Monsieur J. Baixeras, qui sera soutenue ultérieurement à la Faculté des Sciences de Paris.

Pour avoir une description plus générale du phénomène décrit ci-dessus, nous calculons la vitesse de déplacement de chaque vortex. Il faut bien remarquer que le problème a deux aspects différents : d'une part le milieu est visqueux, ce que nous traduisons par le coefficient de viscosité η, et d'autre part il existe dans le matériau un très grand nombre de 'points d'ancrage' pour les vortex. Ce dernier fait nous conduit à adopter un traitement statistique de l'assemblée de vortex. Pour la suite des raisonnements, nous nous plaçons à une température et un champ magnétique bien déterminés. Lorsqu'un courant de densité moyenne J traverse l'échantillon, il exerce sur les filaments une certaine force ; cette force dépend de la densité de courant locale autour du vortex considéré et de la courbure des vortex ; pour l'évaluer, de nombreux auteurs[2,3,5-9] utilisent l'expression $J\phi_0/c$ par unité de longueur ; bien que ce ne soit qu'une approximation, nous utiliserons cette expression. Par ailleurs on peut attribuer à chaque filament une certaine force d'ancrage f_i, par unité de longueur, que nous pouvons toujours mettre sous la forme $J_i\phi_0/c$ pour plus de commodité. Pour certains vortex cette force sera supérieure à la force due au courant et ils resteront piégés, les autres pour lesquels J_i est inférieur à J vont se déplacer. La vitesse de l'un de ces vortex est définie par l'équation dynamique:[10,11]

$$\eta v_i = (J - J_i)\frac{\phi_0}{c}. \qquad (1)$$

Remarquons ici que la force d'ancrage subie par un vortex résulte non seulement de son interaction directe avec le matériau, mais aussi de l'influence des vortex se trouvant autour de lui et qui, eux-mêmes, interagissent avec le matériau. Nous voyons que ce phénomène est très compliqué et pas encore élucidé à l'heure actuelle, bien que certaines idées aient déjà été proposées;[12-16] nous ne rentrerons donc pas dans le détail du phénomène physique de piègeage.

Un vortex bien déterminé n'a aucune raison de conserver la même force d'ancrage tout au long de son déplacement, car celle-ci va dépendre fortement de l'endroit du matériau où se trouve le vortex, celui-ci pouvant même être piégé après s'être déplacé d'une certaine distance. Nous supposerons qu'il y aura toujours un vortex soumis à une force d'ancrage $J_i\phi_0/c$. Grâce à cette remarque, la statistique va finalement porter sur les 'points d'ancrage' plus que sur les vortex. L'équation précédente définit ainsi la vitesse d'un vortex sans qu'il soit nécessaire de préciser lequel.

En prenant $J\phi_0/c$ comme expression de la force exercée par le courant sur un vortex, en plus de l'approximation signalée plus haut, nous avons négligé un possible effet Magnus, celui-ci donnant lieu toutefois à un champ électrique transversal qui serait environ de 1 pour cent du champ longitudinal,[17] qui seul est en cause dans notre cas ; la correction à apporter serait minime et nous n'en tiendrons pas compte, d'autant plus que certains prétendent que cet effet n'existe pas.[7,18]

3. CALCUL DE LA PUISSANCE DISSIPEE ET DE LA TENSION LONGITUDINALE

Pour le matériau idéal sans forces d'ancrage, certains auteurs[3,5] ont écrit la puissance par unité de volume sous la forme

$$P/V = n\eta v_L^2$$

v_L étant la vitesse du vortex, définie par

$$\eta v_L = \frac{J\phi_0}{c}.$$

De sorte que la puissance peut s'écrire indifféremment

$$\frac{P}{V} = n\eta v_L^2$$

ou

$$\frac{P}{V} = nv_L \times \frac{J\phi_0}{c}.$$

Pour le matériau réel il est important de savoir laquelle de ces deux expressions est formellement valable, car les résultats obtenus en utilisant l'une ou l'autre sont différents.

Il nous semble que ce soit la deuxième, comme il a été dit par ailleurs[19] qui doive être adoptée, car la tension observée aux bornes de l'échantillon est due au travail effectué par le courant de conduction imposé par l'extérieur sans tenir compte des forces internes du matériau. C'est

donc cette expression que nous adopterons dans la suite de l'exposé.

La puissance dissipée par le vortex considéré et par unité de longueur, est :

$$P_i = v_i \frac{J\phi_0}{c} = \frac{\phi_0^2}{c^2}\frac{1}{\eta}(J-J_i)J. \qquad (2)$$

Cette équation est valable pour $J > J_i$; dans le cas contraire $v_i = 0$ et $P_i = 0$.

Nous définissons ainsi deux catégories de vortex : ceux pour lesquels $J_i < J$ et qui donnent lieu à des pertes. Ceux pour lesquels $J_i > J$, qui restent piégés et par conséquent ne dissipent pas de puissance.

Soit S la surface occupée par les N filaments contenus dans le matériau, la puissance par unité de volume s'écrit :

$$\frac{P}{V} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N} P_i = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N_1}\frac{1}{\eta}\frac{\phi_0^2}{c^2}J(J-J_i), \qquad (3)$$

N_1 étant le nombre de vortex en déplacement. Notons au passage que N_1 dépend de la température, du champ magnétique et de la densité de courant J.

Si on suppose que n_i vortex peuvent se trouver dans l'état défini par l'indice 'i,' la puissance peut se mettre sous la forme

$$\frac{P}{V} = \frac{1}{S}\frac{1}{\eta}\frac{\phi_0^2}{c^2}\sum J(J-J_i)n_i, \qquad (4)$$

la somme étant étendue aux J_i inférieurs à J.

Nous allons maintenant introduire une densité de probabilité $f(J_i)$ des forces d'ancrage telle que :

$$\int_0^\infty f(J_i)\,dJ_i = 1. \qquad (5)$$

La puissance s'écrit alors :

$$\frac{P}{V} = \frac{1}{\eta}\frac{\phi_0^2}{c^2}\frac{N}{S}\int_{J_i=0}^{J_i=J} J(J-J_i)f(J_i)\,dJ_i \qquad (6)$$

l'intégrale est prise de 0 à J, car seuls les vortex pour lesquels $J_i < J$ participent aux pertes.

Notons que $N/S = n$ est la densité de filaments définie par $n\phi_0 = B$. Nous savons par ailleurs que $P/V = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{E}$ étant le champ électrique. Ce dernier peut donc se mettre sous la forme :

$$E = \frac{\phi_0 B}{\eta c^2}\int_0^J (J-J_i)f(J_i)\,dJ_i. \qquad (7)$$

Nous avons signalé précédemment que la statistique portait en réalité sur les points d'ancrage, cela apparaît clairement sur la dernière expression de E puisque la fonction de répartition porte sur les forces d'ancrage.

4. DESCRIPTION DES POPULATIONS DE VORTEX

Cette analyse du déplacement des vortex va nous permettre de déterminer un certain nombre de paramètres :

la proportion de vortex en mouvement pour un courant déterminé ;

la force moyenne d'ancrage à laquelle sont soumis ces vortex ;

la fonction de répartition $f(J_i)$.

A cet effet nous calculons les dérivées du champ électrique par rapport à la densité de courant :

$$\frac{dE}{dJ} = \frac{\phi_0 B}{\eta c^2}\int_0^J f(J_i)\,dJ_i. \qquad (8)$$

Nous voyons que cette dérivée première nous permet de connaître la proportion de vortex qui se déplacent sous l'action d'un courant de densité J_0 :

$$\int_0^{J_0} f(J)\,dJ_i = \frac{\eta c^2}{\phi_0 B}\left(\frac{dE}{dJ}\right)_{J=J_0} \qquad (9)$$

la dérivée seconde

$$\frac{d^2E}{dJ^2} = \frac{\phi_0 B}{\eta c^2}f(J) \qquad (10)$$

permet d'avoir la valeur de la fonction de répartition pour J_0 :

$$f(J_0) = \frac{\eta c^2}{\phi_0 B}\left(\frac{d^2E}{dJ^2}\right)_{J=J_0} \qquad (11)$$

Nous avons ainsi en principe le moyen, à partir des courbes expérimentales donnant la tension en

fonction du courant, de déterminer point par point la fonction de répartition $f(J_i)$.

Notons au passage que, grâce à la relation de normalisation, on peut avoir l'expression de η :

$$\eta = \frac{\phi_0 B}{c^2} \frac{1}{(dE/dJ)_\infty} \tag{12}$$

où $(dE/dJ)_\infty$ est la dérivée limite du champ électrique lorsque J devient très grand. Remarquons à ce propos que la courbe représentant E en fonction de J admet pour asymptote la droite d'équation

$$E = \frac{\phi_0 B}{\eta c^2}\left[J - \int_0^\infty J_i f(J_i)\, dJ_i\right], \tag{13}$$

$\int_0^\infty J_i f(J_i)\, dJ_i$ représentant la force moyenne d'ancrage de tous les vortex présents dans le matériau. Ainsi le résultat de Kim *et al.*[3,9] apparaît comme un cas limite d'une loi plus générale, ce que nous avions déjà laissé entendre.

Il nous reste encore à déterminer la force moyenne d'ancrage des vortex en déplacement pour un courant de densité J quelconque. Pour cela posons

$$\frac{E\eta c^2}{\phi_0 B} = y$$

et établissons l'équation de la tangente à la courbe $y(J)$ en un point y_0, J_0. La pente de la tangente est

$$\int_0^{J_0} f(J_i)\, dJ_i$$

et l'équation

$$y - \int_0^{J_0} (J_0 - J_i) f(J_i)\, dJ_i = \int_0^{J_0} (J - J_0) f(J_i)\, dJ_i.$$

Soit J_{tg} le point où cette droite coupe l'axe des J, on a

$$-\int_0^{J_0} (J_0 - J_i) f(J_i)\, dJ_i = \int_0^{J_0} (J_{tg} - J_0) f(J_i)\, dJ_i$$

et finalement

$$J_{tg} = \frac{\int_0^{J_0} J_i f(J_i)\, dJ_i}{\int_0^{J_0} f(J_i)\, dJ_i}. \tag{14}$$

Nous voyons alors que J_{tg} représente la force moyenne d'ancrage recherchée, nous pouvons donc l'obtenir directement à partir de la courbe expérimentale.

5. DEFINITION D'UN MODELE

Nous allons maintenant essayer d'évaluer à priori la probabilité pour qu'il y ait des vortex dont la force d'ancrage soit comprise entre F et $F + dF$, c'est-à-dire en fait la fonction $f(J_i)$.

Le nombre de vortex de la surface S étudiée ayant une force d'ancrage supérieure à $J\phi_0/c$ est

$$N_p(J) = N\left[1 - \int_0^J f(J_i)\, dJ_i\right];$$

ces vortex sont piégés et quand on passe de J à $J + dJ$ le nombre de vortex piégés varie de dN_p ce qui entraîne une variation de $(-dN_p)$ des vortex mobiles ; pour des raisons d'ordre physique $(-dN_p/dJ)$ doit être une fonction croissante de N_p, car plus il y a de vortex piégés, plus on a de chances d'en décrocher en augmentant le courant. Ecrivons donc la loi la plus simple répondant à cette exigence, c'est la loi linéaire

$$\frac{-dN_p}{dJ} = +KN_p\ ;$$

il vient $N_p = C \exp - KJ$,
soit encore

$$1 - \int_0^J f(J_i)\, dJ_i = C \exp - KJ,$$

et en dérivant par rapport à J on obtient la forme de $f(J)$:

$$f(J) = CK \exp - KJ\ ; \tag{15}$$

les diverses expériences réalisées nous montrent que, pour un champ magnétique donné, la tension apparaît pour une certaine densité de courant que nous noterons J_c. Cela nous indique que

$$\int_0^{J_c} f(J_i)\,dJ_i = 0, \tag{16}$$

puisqu'il n'y a pas de pertes au-dessous de J_c. La relation de normalisation peut donc s'écrire

$$\int_{J_c}^{\infty} f(J_i)\,dJ_i = 1. \tag{17}$$

Comme nous savons par ailleurs que $f(J)$ est de la forme (15) on trouve aisément, en posant $K = 1/J_0$

$$\begin{aligned} f(J) &= \frac{1}{J_0}\exp-\frac{J-J_c}{J_0} \quad \text{pour} \quad J \geqslant J_c \\ f(J) &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{pour} \quad J < J_c \end{aligned} \tag{18}$$

6. COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

Il nous reste maintenant à voir si les prévisions de ce modèle sont en bon accord avec l'expérience. Les courbes expérimentales ont été relevées par la méthode précédemment décrite,[4] l'échantillon étant de la feuille laminée de Niobium (en provenance de la KAWECKI BILLITON C°) de 5/100 mm d'épaisseur. Le specimen a été recuit, sous un vide de 10^{-4} torr, pendant 16 h à la température de 900°. Les courbes expérimentales sont reportées sur la Fig. 1.

Pour faciliter la comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux, nous remplaçons la densité de courant J par le courant I qui traverse effectivement l'échantillon, de même J_c et J_0 ont pour homologue I_c et I_0. La forme de la tension est alors :

$$v = \frac{\phi_0\sigma_n B R_n}{c^2\eta}\int_{I_c}^{I}\frac{(I-I_i)}{I_0}\exp\frac{-(I_i-I_c)}{I_0}\,dI_i \tag{19}$$

R_n et σ_n étant la résistance et la conductivité à l'état normal.

On trouve alors

$$v = \frac{\phi_0\sigma_n B R_n}{c^2\eta}\left[I-I_c-I_0\left(1-\exp-\frac{I-I_c}{I_0}\right)\right]. \tag{20}$$

Nous voyons bien sous cette forme que v tend vers une droite et c'est le paramètre I_0 qui détermine la rapidité avec laquelle l'écart entre la courbe et la droite

$$\frac{\phi_0\sigma_n}{\eta c^2}BR_n[I-I_c-I_0] \text{ va décroître.}$$

En particulier si I_0 est faible, la courbe obtenue se confond presque avec une droite pour des valeurs de I légèrement supérieures à I_c.

Pour tester notre modèle nous pourrions vérifier la forme de v, mais cela donnerait lieu à des calculs compliqués. Nous pourrions aussi utiliser la formule (11) en déterminant la dérivée seconde de la tension, cependant l'imprécision serait trop grande. Pour ces raisons nous utiliserons la dérivée première, m ; dont l'expression est :

$$m = \frac{dv}{dI} = \frac{\phi_0\sigma_n}{\eta c^2}BR_n\left[1-\exp-\frac{I-I_c}{I_0}\right] \tag{21}$$

que l'on peut écrire

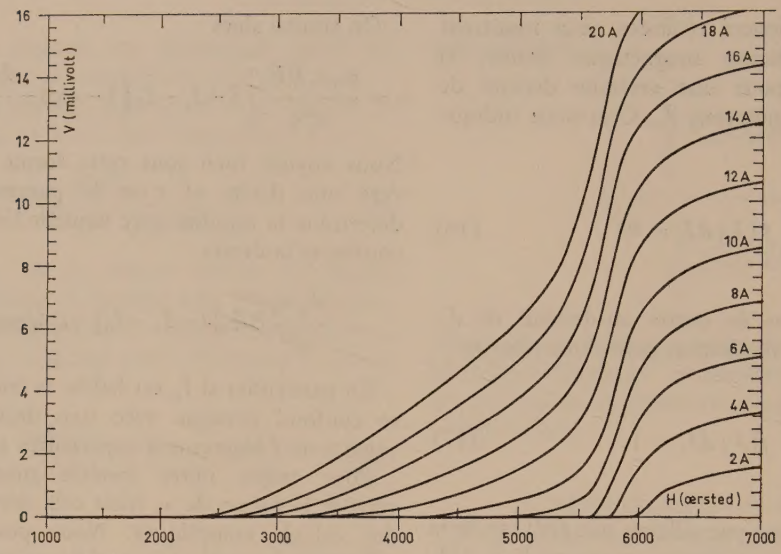
$$m = m_0\left[1-\exp-\frac{I-I_c}{I_0}\right] \tag{22}$$

m_0 étant la dérivée limite pour I très grand.

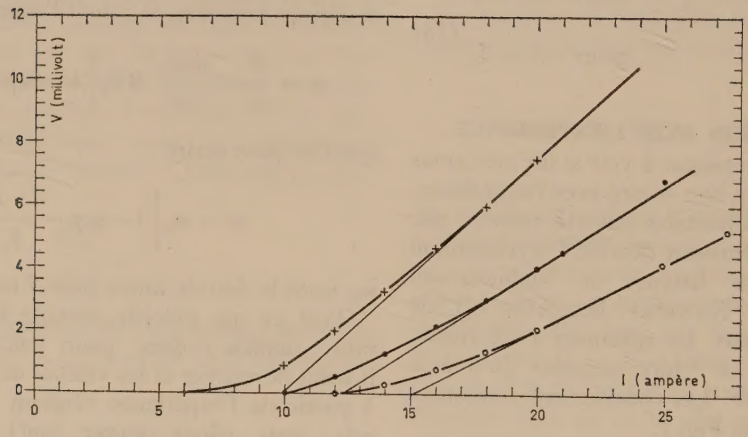
Tout ce qui précède découle logiquement de notre modèle ; donc pour voir s'il convient, il suffit de vérifier si les valeurs de m déterminées à partir de l'expérience vérifient cette loi. Pour cela nous allons porter $\log[1-(m/m_0)]$ en fonction de I ; si l'expression ci-dessus est valable nous devons obtenir une droite.

Pour trois champs magnétiques donnés les résultats sont portés sur la Fig. 2. Nous constatons que compte tenu des erreurs de détermination de m, l'accord entre la théorie et l'expérience est remarquable.

Nous nous sommes limités dans cet article volontairement à un seul exemple expérimental, mais cette vérification a été effectuée sur d'autres matériaux en particulier sur le Pb–8%In.[4] De la même façon les courbes[3,9] obtenues par d'autres auteurs s'expliquent tout aussi bien et



(a)



(b)

FIG. 1. Transitions resistives observees sur un echantillon de niobium lamine et recuit 16 hr à 10^{-4} torr. (a) Variations de la tension en fonction du champ magnétique pour différents courants dans l'échantillon. (b) Variations de la tension en fonction du courant pour: $\circ H = 3570$ Oe, $\bullet H = 4300$ Oe, $+H = 5250$ Oe.

conduisent à des valeurs de I_0 faibles d'après ce que nous avons vu plus haut.

7. CONCLUSION

On peut dire en conclusion que nous avons fait un traitement statistique du déplacement des vortex qui permet d'étudier le phénomène des transitions résistives d'une façon générale dans le cadre de nos hypothèses. D'autre part le modèle défini par la suite permet de caractériser le comportement des différents matériaux par la valeur du paramètre J_0, il faut donc expliciter la signification physique de ce paramètre. Celle-ci ressort nettement de la définition de notre modèle,

en effet J_0 détermine la pente de l'exponentielle $f(J)$ pour $J = J_c$ et donc en quelque sorte la largeur de la répartition des forces de piègeage : si J_0 est faible les défauts ont des efficacités voisines et à la limite si J_0 est nul $f(J)$ est la fonction de Dirac $\delta(J - J_c)$ et il existe une seule

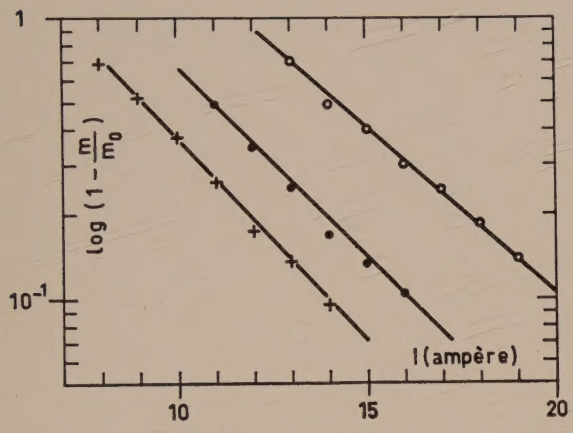
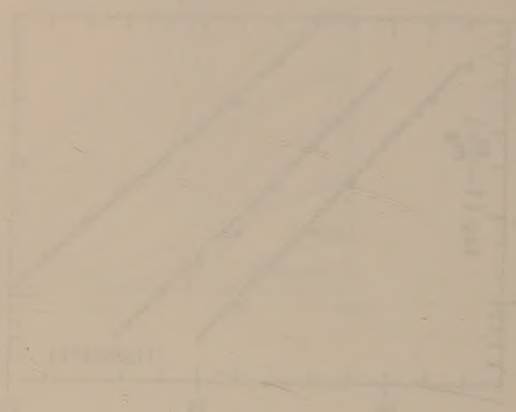


FIG. 2. La validité de notre modèle est testée par la linéarité de $\log(1-(m/m_0))$ en fonction de I. Sur ce graphique sont reportées les courbes relatives A: $\bigcirc H = 3570$ Oe, $\bullet H = 4300$ Oe, $+H = 5250$ Oe.

valeur de la force de piègeage pour l'ensemble des vortex, qui vont se déplacer alors d'un mouvement d'ensemble dès que J sera supérieur à J_c, c'est le cas envisagé par KIM *et al.*[9] Par contre si J_0 est grand, les forces de piègeage sont étalées sur une large gamme de valeurs, ce qui peut se produire pour des matériaux n'ayant subi aucun traitement métallurgique spécial ou ayant été recuits de façon à détruire un éventuel réseau régulier de pièges, cas du niobium utilisé par exemple.

Une étude détaillée du comportement de J_0 en fonction du champ magnétique et de la température devrait nous apporter de précieux renseignements sur l'interaction entre les défauts et les filaments.

Rémerciement—Ce travail a été entrepris grâce à la D.G.R.S.T. (Comité 'Electrotechnique Nouvelle').

BIBLIOGRAPHIE

1. ABRIKOSOV A. A., *Soviet Phys. JETP* **5,** 1174 (1957).
2. HEMPSTEAD C. F. and KIM Y. B., *Phys. Rev. Lett.* **12,** 145 (1964).
3. STRNAD A. R., HEMPSTEAD C. F. and KIM Y. B., *Phys. Rev. Lett.* **13,** 794 (1964).
4. BAIXERAS J., *Phys. Lett.* **21,** 30 (1966).
5. STEPHEN M. J. and BARDEEN J., *Phys. Rev. Lett.* **14,** 112 (1965).
6. TINKHAM M., *Phys. Rev. Lett.* **13,** 804 (1964).
7. BARDEEN J., *Phys. Rev. Lett.* **13,** 747 (1964).
8. VAN VIJFEIJKEN A. G. and NIESSEN A. K., *Phys. Lett.* **16,** 23 (1965).
9. KIM Y. B., HEMPSTEAD C. F. and STRNAD A. R., *Phys. Rev.* **139,** A1163 (1965).
10. CHANDRASEKHAR B. S., DINEVITZ I. J. and FARRELL D. E., *Phys. Lett.* **20,** 321 (1966).
11. GIAVER I., *Phys. Rev. Lett.* **16,** 460 (1966).
12. ANDERSON P. W., *Phys. Rev. Lett.* **9,** 309 (1962).
13. FRIEDEL J., DE GENNES P. G. and MATRICON J., *Appl. Phys. Lett.* **2,** 119 (1963).
14. SILCOX J. and ROLLINS R. W., *Appl. Phys. Lett.* **2,** 231 (1963).
15. KIM Y. B., HEMPSTEAD C. F. and STRNAD A. R., *Phys. Rev.* **131,** 2486 (1963).
16. GITTLEMAN J. I. and ROSENBLUM B., *Phys. Lett.* **20,** 453 (1966).
17. STAAS F. A., NIESSEN A. K. and DRUYVESTEYN W. F., *Phys. Lett.* **17,** 231 (1965).
18. BORCHERDS P. H., GOUGH C. E., VINEN W. F. and WARREN A. C., *Phil Mag.* **10,** 349 (1964).
19. NOZIERES P. and VINEN W. F., *Phil. Mag.* **14,** 667 (1966).